

Activité PC n°2 : Comment mesurer une longueur par triangulation plane ?

Objectif :

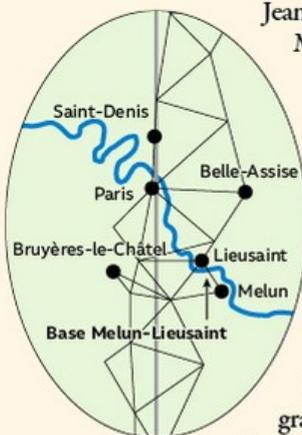
- Calculer une longueur par la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain.
- Calculer le rayon de la Terre à partir de la longueur du méridien.

Mesure d'une longueur par triangulation plane

En 1792, Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) et Pierre Méchain (1744-1804), astronomes et mathématiciens français, sont mandatés par l'Académie des sciences pour établir un système de mesures universel valable qui n'ait plus pour modèle l'homme – on mesurait alors en pouces, en pieds, en coudées... – mais le patrimoine commun de l'humanité: la Terre.

1 – Une stratégie pour mesurer le mètre

L'aventure de a. Delambre et Méchain

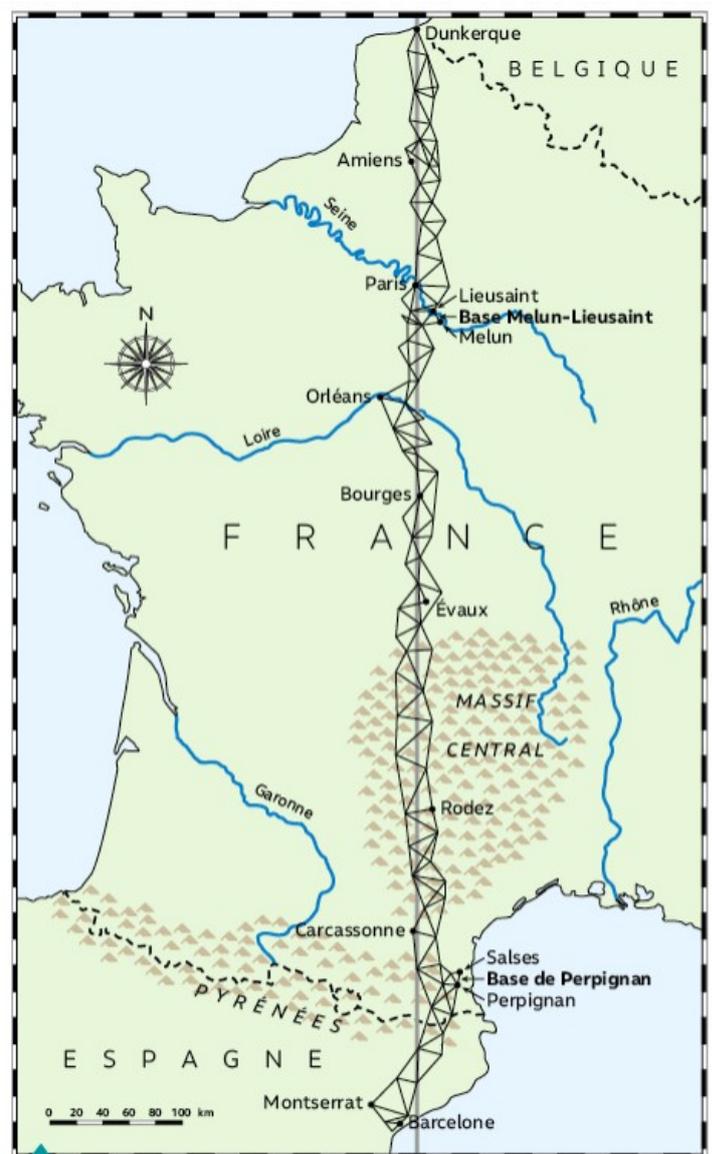


Jean-Baptiste Delambre, Pierre Méchain et leurs collaborateurs devaient définir la longueur du mètre, fixée selon les scientifiques de l'Académie des sciences à « la dix millionième partie du quart du méridien terrestre ». Ils se lancent pour cela dans la mesure du méridien de Paris: une ligne née dans l'imagination des cartographes, qui traverse la France de part en part (de Dunkerque à

Barcelone) pour rejoindre les deux pôles du globe. Les deux tiers supérieurs, de Dunkerque à Rodez, incombent à Jean-Baptiste Delambre, et le parcours Rodez-Barcelone à Pierre Méchain. Aucun monument ne commémore les efforts déployés pour mener à bien cette mission, en pleine Terreur (au moment de la Révolution française)...

Les chercheurs utilisent une méthode mathématique appelée « **triangulation** ». Elle consiste à diviser le terrain en triangles pour le mesurer. On trace d'abord le long du méridien des triangles jointifs, ayant chacun un côté en commun avec le suivant. Il suffit ensuite de mesurer les angles des triangles par visée, depuis un endroit situé en hauteur (clocher, château, tour) et de disposer de la longueur d'une seule base (celle de Melun-Lieusaint pour la partie nord) pour pouvoir en déduire tous les côtés des triangles dont la somme était précisément la portion de méridien.

D'après Azar Khalatbari,
« Le mètre et le méridien »,
www.liberation.fr, 2006.



b. Chaîne des triangles de Dunkerque à Barcelone

2 – Définir une base pour la méthode

c. La base Melun-Lieusaint

On peut effectuer une triangulation à partir de la connaissance de la longueur d'une première base de 6075,90 **toises** entre Melun et Lieusaint, deux villes situées en Seine-et-Marne (77). Ainsi, à partir des extrémités de cette base, Jean-Baptiste Delambre vise Malvoisine. De la mesure des angles, il déduit la distance Lieusaint-Malvoisine et celle-ci constitue la base d'un nouveau triangle dont le sommet sera Monthléry. Une chaîne de triangles successifs juxtaposés est ainsi formée le long de la méridienne. L'arc de méridien Dunkerque-Barcelone a pour longueur un quart de méridien terrestre.

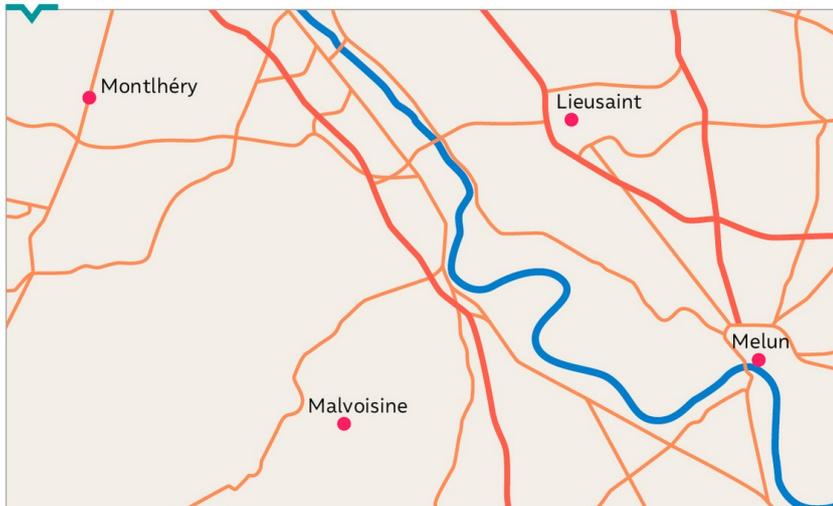
D'après « Un voyage... de Dunkerque à Barcelone », www.clea-astro.eu.

d. Mesures effectuées par Delambre

Angle au sommet « Melun »	Angle au sommet « Lieusaint »	Angle au sommet « Malvoisine »
63°43'34"	75°39'29"	40°36'57"

Les triangles

e. Lieusaint-Melun-Malvoisine et Lieusaint-Malvoisine-Monthléry



La **triangulation** est une des plus anciennes techniques humaines pour construire ou se repérer. Elle a servi dans la construction des pyramides ou la cartographie mondiale et elle permet actuellement l'utilisation du GPS, le calcul de sollicitation, la représentation 3D, dans les jeux, et même en politique ou psychologie.

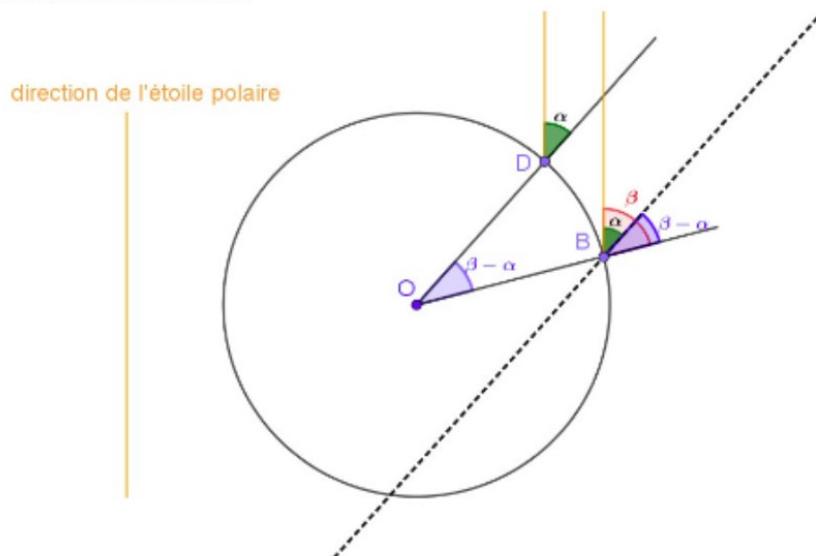
Elle se base sur un constat en géométrie plane : si l'on modifie une grandeur d'un triangle (l'un des trois côtés ou l'un des trois angles), on modifiera aussi d'autres grandeurs du triangle. Ceci sous-entend que les grandeurs du triangle sont liées entre elles.

3 – Déterminer la longueur du quart de méridien

La longueur de l'arc de méridien reliant Dunkerque à Barcelone étant déterminée, la connaissance de la différence des latitudes de ces deux villes permet de déterminer la longueur du méridien.

Pour déterminer cet angle, les astronomes ont mesuré les angles α et β entre la verticale (passant par le centre de la Terre) et la direction d'une étoile lointaine, l'étoile polaire par exemple, à Dunkerque et à Barcelone.

La figure ci-dessous illustre ce procédé : le cercle tracé est le méridien passant par Dunkerque (représenté par le point D) et Barcelone (représenté par le point B). Le point O représente le centre de la Terre.



L'angle \widehat{BOD} , différence des latitudes entre Dunkerque et Barcelone, a pour mesure $\beta - \alpha$.

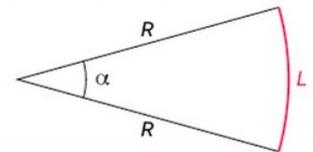
Questions :

1. Réaliser le triangle Lieusaint, Melun, Malvoisine et y placer les trois angles au sommet indiqués dans les données.
2. Écrire la loi des sinus appliquée au triangle représenté au 1.
3. Déterminer la valeur de la distance Melun - Malvoisine
4. La différence de latitude entre Dunkerque et Barcelone déterminée par Delambre et Méchain est de $9^{\circ}40'24''$ et la distance séparant les deux villes de 551 585 toises. Déterminer la valeur du quart de méridien qui a servi à donner le mètre étalon en 1792. En déduire la valeur du rayon terrestre.



DONNÉES

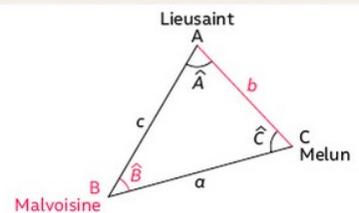
La longueur L d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle α qui l'intercepte: $L = R \times \alpha$ avec R le rayon du cercle et α l'angle correspondant en radian (rad).



Dans le triangle ABC, les longueurs des côtés et les angles au sommet vérifient la relation:

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

avec $\sin(\hat{A})$, $\sin(\hat{B})$, $\sin(\hat{C})$ non nuls.



Toise: unité de longueur ancienne, correspondant à six pieds:
 1 toise = 1,949 m.
 1 minute d'arc (notée 1') correspond à $\frac{1}{60}^{\circ}$.
 1 seconde d'arc (notée 1'') correspond à $\frac{1}{60}$ et donc à $\frac{1}{3600}^{\circ}$.

À retenir :

Historiquement, la méthode de..... a permis de calculer la longueur d'un à partir de mesures d'.....